

# 热荷载作用下输流管道临界流速解析计算方法

陈严飞<sup>1,2\*</sup>, 敖川<sup>1</sup>, 董绍华<sup>1</sup>, 刘昊<sup>1</sup>, 马尚<sup>1</sup>, 夏通璟<sup>1</sup>

1 中国石油大学(北京)油气管道输送安全国家工程实验室/城市油气输配技术北京市重点实验室, 北京 102249

2 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

\* 通信作者, chenylvip@163.com

收稿日期: 2020-06-09

国家重点研发计划(2017YFC0805800)、国家自然科学基金(51779265)、大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金(GZ19119)、深水油气管线关键技术与装备北京市重点实验室开放基金(BIPT2018002)和中国石油大学(北京)科研基金资助(2462020YXZZ045, 2462017BJB10)联合资助

**摘要** 输流管道常用于石油天然气行业中, 管道内过高流速会引发结构失稳, 因此掌握输流管道临界流速的计算方法至关重要。受热荷载作用下的输流管道也经常应用于实际工程领域中, 比如加热输送的原油管道和供暖管道等。热荷载作用下的输流管道相比于基本输流管道受到热荷载作用引起的轴力, 其自然振动频率及临界流速与普通输流管道存在一定的差异。基于哈密顿原理推导得到热荷载作用下两端支承输流管道的振动偏微分方程, 通过分离变量将方程简化为一元四次齐次常微分方程。根据两端支承输流管道临界流速条件简化微分方程并求得通解, 给出了适用不同边界条件的输流管道临界流速解析表达式。基于算例分析了不同边界条件下线性热应力和非线性热应力对输流管道临界流速的影响, 并与微分求积计算方法的结果进行对比, 验证了给出的解析计算方法的准确性。研究表明相对于微分求积法, 提出的解析方法计算更加简单, 准确性更高, 可以更方便的得到输流管系统的临界流速值, 有利于指导工程实践; 线性热应力和非线性热应力作用下的输流管系统的临界流速均随着热荷载的增加而降低, 且下降速度越来越快; 同等情况下非线性热应力作用下临界流速大于线性热应力作用下的临界流速, 且随着热荷载的增加, 两者间的差距逐渐增大; 对比边界条件发现, 固定边界条件能够承受的热荷载最大, 因此对热荷载作用下输流管系统施加固定边界条件有利于提高系统的稳定性。本文提出的热荷载作用下输流管道临界流速的解析方法在工程现场可以方便快速地得到准确的临界流速, 为热荷载作用下输流管道系统的设计和安全评价提了参考依据。

**关键词** 输流管道; 支承管道; 热荷载; 临界流速; 解析方法

## Analytical solution of the critical velocity in pipes conveying fluid under thermal loading

CHEN Yanfei<sup>1,2</sup>, AO Chuan<sup>1</sup>, DONG Shaohua<sup>1</sup>, LIU Hao<sup>1</sup>, MA Shang<sup>1</sup>, XIA Tongjing<sup>1</sup>

1 National Engineering Laboratory for Pipeline Safety / Beijing Key Laboratory of Urban Oil and Gas Distribution Technology, China University of Petroleum-Beijing, Beijing 102246, China

2 State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

**Abstract** Pipes conveying fluid play an important role in the oil & gas industry. It is critical to determine the critical velocity

引用格式: 陈严飞, 敖川, 董绍华, 刘昊, 马尚, 夏通璟. 热荷载作用下输流管道临界流速解析计算方法. 石油科学通报, 2021, 01: 138-144

CHEN Yanfei, AO Chuan, DONG Shaohua, LIU Hao, MA Shang, XIA Tongjing. Analytical solution of the critical velocity in pipes conveying fluid under thermal loading. Petroleum Science Bulletin, 2021, 01: 138-144. doi: 10.3969/j.issn.2096-1693.2021.01.011

for structural stability design and safety evaluation of these pipes. Pipes conveying fluid under thermal load are also often used in practical engineering fields, such as crude oil pipeline heating transportation and heated pipelines. Compared with the basic pipes conveying fluid, the natural vibration frequency and critical velocity of a pipeline under thermal load are different from those of the basic pipeline. Based on Hamilton's principle, the partial differential equation of vibration of supported pipes conveying fluid under thermal loads is derived and the equation is reduced to a univariate fourth-order homogeneous ordinary differential equation by separating variables. A general solution is obtained according to the critical flow velocity conditions of supported pipes conveying fluid. Furthermore, the analytical solutions of the critical velocity are obtained considering various boundary conditions. Finally, numerical examples are presented for analyzing the influence of linear thermal stress and nonlinear thermal stress on the critical velocity under various boundary conditions. The predictions using the proposed analytical solution are compared with results using the differential quadrature method available in the literature. It is demonstrated that the proposed analytical solution can give an accurate solution efficiently, which can be used in engineering practice. The critical flow rate of the pipes conveying a fluid system under linear thermal stress and non-linear thermal stress decreases with an increase of thermal load, and the decrease becomes larger and larger. In the same case, the critical velocity under nonlinear thermal stress is greater than that under linear thermal stress, and the gap between them increases with an increase of thermal load. Comparing the boundary conditions, it is found that fixed boundary conditions can bear the largest thermal load. Therefore, applying fixed boundary conditions to the pipes conveying fluid system under the thermal load is beneficial to improve the stability of the system. In this paper, the analytical method for critical velocity of pipes conveying fluid under thermal load can be obtained conveniently and quickly at the engineering site, which provides a reference for the design and safety evaluation of pipes conveying fluids under thermal load.

**Keywords** pipes conveying fluid; supported pipes; thermal loads; critical velocity; analytical method

**doi:** 10.3969/j.issn.2096-1693.2021.01.011

输流管道系统在石油化工领域中扮演着十分重要的角色。因此,如果管道系统因为振动而失稳,将造成十分严重的经济损失。因此,近年来,国内外诸多研究者对输流管道的振动问题进行了深入详细的分析研究,使之成为了动力学领域的经典模型。

上世纪 70 年代开始输流管道的振动分析。Prami-la<sup>[1]</sup>在 1991 年使用有限元(FEM)方法分析了输流管道的振动问题。F Tornabene<sup>[2]</sup>使用广义微分求积法讨论了输流管道系统在悬臂边界条件下的临界流速,并分析了质量比对临界流速的影响。Ni 等<sup>[3]</sup>在 2011 年使用微分变换法(DTM)方法研究了典型边界条件下输流管道的自由振动问题。Li 和 Yang<sup>[4]</sup>在 2014 年使用格林函数方法得到了受迫振动输流管道的动态响应。Li 和 Yang<sup>[5]</sup>在 2017 年使用变分迭代法(VIM)求解了输流管道系统的基本运动方程,得到典型边界条件下的临界流速和振动频率。

杨晓东<sup>[6]</sup>等使用伽辽金方法将输流管系统的偏微分方程通过离散化变为常微分方程组,求解得到系统的固有频率。在此基础上,他们还分析了不同流速对系统固有频率的影响。金基铎等<sup>[9]</sup>在欧拉伯努利梁振动方程的基础上得到了两端支承梁弯曲振动的频率方程和振型函数的表达式,得到了临界流速表达式,并进行了系统临界流速关于扭转刚度、重力系数和轴向预紧力的敏感性分析。李琳等<sup>[8]</sup>进一步分析了弹性支

承输流管的稳定性和临界流速,探究了临界流速随着质量比、流体压力和弹性支承刚度等参数的变化规律。翟红波等<sup>[9]</sup>讨论了流速对输流管系统共振的可靠度的影响。姬贺炯等<sup>[10]</sup>对输流管道系统进行了实验和有限元建模研究,有限元模型结果与实验结果吻合良好,证明了使用数值模拟方法对输流管道系统分析的合理性。包日东等<sup>[11]</sup>使用数值仿真方法,讨论了流速对弹性地基支承输流管道固有频率和非线性特性的影响。张大千等<sup>[12]</sup>运用有限元软件,构建了输流管道有限元模型,得到了不同工况下管道的固有频率和管道模态。

虽然国内外对于输流管道系统进行了大量的研究,但除 Qian 等<sup>[13]</sup>在 2009 年使用微分求积法(DQM)求解热荷载作用下铰支输流管道的稳定性问题外,对于热荷载作用下的输流管道的研究鲜有报道。但在工程实践中,受热荷载作用的输流管道应用较多,如加热输送原油管道以及供暖管道。上述管道一旦发生失稳,将造成极为严重的经济损失和环境破坏。众所周知,输流管道系统中的临界流速对于判断系统稳定状态具有十分重要的意义。当流体速度低于临界流速时,系统处于稳定状态,而流速高于临界流速时,系统将失稳。所以,研究热荷载作用下输流管道的临界流速具有重要的意义。

以往输流管道问题的求解一般都采用数值方法,往往需要复杂编程进行配合求解,相比于显式解析求

解,不但计算量大,而且一般的工程技术人员难以掌握,不利于现场工程应用。本文提出的热荷载作用下输流管道临界流速的解析方法可以有效避免以上缺陷,适用于石油石化领域输油管道常见的管道跨长和温差情况,在工程现场可以方便快速地得到准确的临界流速,为热荷载作用下输流管道系统的设计和安全评价提供依据,对于指导工程实际具有一定的意义。

## 1 输流管道振动方程

### 1.1 振动方程导出

考虑长为 $L$ 的输送不可压缩流体的均匀管道,横截面积为 $A$ ,管道单位长度质量为 $m$ ,弯曲刚度为 $EI$ ,流体单位长度质量为 $M$ ,流速为 $U$ 。

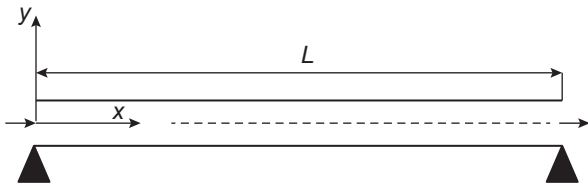


图1 支承输流管道模型

Fig. 1 Model of supported pipes conveying fluid

不考虑重力作用和管道流体之间的摩擦力作用,假设管道的自由振动为小变形,Ziegler和Rammerstorfer<sup>[14]</sup>给出系统的应变能为

$$V = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{A}{2E} \left[ E \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma(\Delta T) \right]^2 dx \quad (1)$$

式中, $v, w$ 分别表示轴向和横向位移, $\gamma(\Delta T)$ 表示热应力。线性热应力可表示为

$$\gamma(\Delta T) = E\alpha\Delta T$$

上式在小温差和小变形条件下是有效的,但是在温差较大时将会产生一定的误差。在温度差较大的情况下,非线性关系较线性关系更为精确,非线性热应力可以定位为

$$\gamma(\Delta T) = E\alpha\Delta T + h\alpha^2\Delta T^2$$

上式中, $\alpha$ 为热膨胀系数, $h$ 系数为 $h = l(1-2\nu) - 2m(\nu^2 - 1) + n\nu^2$ , $l, m, n$ 为Murnaghan's常数, $\nu$ 为泊松比。

系统的动能为

$$W = \int_0^L \frac{m}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{M}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

式中,第一项是管道的动能,第二项是流体的动能。

对于端部支承输流管道系统的哈密顿原理可表示

为

$$\delta I_L = \int_{t_1}^{t_2} \delta(W - V) dt = 0 \quad (3)$$

将式(1)、(2)代入式(3)中可得到轴向和横向的运动方程分别为

$$EA \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\gamma(\Delta T)}{E} \right] = 0 \quad (4)$$

$$(M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\gamma(\Delta T)}{E} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = 0 \quad (5)$$

忽略横向变形对系统轴向方向上的影响,则轴向上的边界条件可如下表示

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (6)$$

两端铰支的横向边界条件为

$$w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0 \quad (7)$$

一端固支而一端铰支横向边界条件为

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w''(L) = 0 \quad (8)$$

两端固支横向边界条件为

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0 \quad (9)$$

由式(4)可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\gamma(\Delta T)}{E} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\gamma(\Delta T)}{E} \right] dx = -\frac{\gamma(\Delta T)}{E} \quad (10)$$

将式(10)带入式(5)可得

$$(M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (MU^2 + A\gamma(\Delta T)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \quad (11)$$

上式中第一项表示表示管道和流体的惯性力,第二项表示管道的弹性弯曲回复力,第三项表示流体的离心力和热荷载作用引起的管道轴向力,第四项表示流体的科氏力。

### 1.2 振动方程简化

令

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \left( \frac{EI}{M + m} \right)^{\frac{1}{2}}, u = UL \left( \frac{M}{EI} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \frac{M}{M + m}, \lambda_T = \frac{\gamma(\Delta T)AL^2}{EI}$$

则式(11)可表示为

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + (u^2 + \lambda_T) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (12)$$

假设系统做简谐振动, 即

$$\eta(\xi, \tau) = y(\xi)e^{\omega\tau}$$

带入式(12)中得到

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + (u^2 + \lambda_T) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + 2u\omega\sqrt{\beta} \frac{dy}{d\xi} + \omega^2 y = 0 \quad (13)$$

对应边界条件如表 1 所示。

表 1 支承输流管道边界条件

Table 1 Boundary conditions for supported pipes conveying fluid

边界条件	左端	右端
两端铰支 (P-P)	$y(0) = y''(0) = 0$	$y(1) = y''(1) = 0$
两端固支 (C-C)	$y(0) = y'(0) = 0$	$y(1) = y'(1) = 0$
左端固支	$y(0) = y'(0) = 0$	
右端铰支 (C-P)		$y(1) = y''(1) = 0$

## 2 临界流速的解析方法

可以看出简化后的热荷载作用下输流管道振动方程(13)为一元四次齐次常微分方程, 但是由于系数中存在的  $u, \omega$  均为待求特征值, 求其动态响应时, 需要求解给定流速  $u$  下管道的振动频率。随着  $u$  的逐渐增大, 管道振动频率逐渐减小, 当一阶振动频率减小为 0 时, 此时的流速就是输流管道系统的临界流速。Paidoussis<sup>[15]</sup>得出结论, 两端支承(一端固定一端铰支, 两端铰支, 两端固定)的输流管道为无耗散的保守系统, 其临界流速在  $\omega = 0$  时取得。根据该临界流速条件, 令式(13)中  $\omega = 0$  有

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + (u^2 + \lambda_T) \frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0 \quad (14)$$

当  $u^2 + \lambda_T \geq 0$  (一般均能满足)时, 易知式(14)的通解为

$$y = A \sin(\sqrt{u^2 + \lambda_T} \xi) + B \cos(\sqrt{u^2 + \lambda_T} \xi) + C\xi + D$$

以两端铰支边界条件为例, 施加边界条件后, 得到

表 2 算例参数

Table 2 Parameters of calculation example

物理量	数值	物理量	数值
弹性模量 $E/\text{MPa}$	$1.94 \times 10^5$	截面惯性矩 $I/\text{m}^4$	$5.97 \times 10^{-9}$
管道单位长度质量 $m/(\text{kg}/\text{m})$	1.2706	流体单位长度质量 $M/(\text{kg}/\text{m})$	0.1602
管道截面积 $A/\text{m}^2$	$1.6 \times 10^{-4}$	热膨胀系数 $\alpha/(\text{C}^{-1})$	$11 \times 10^{-6}$
$h$ 系数	-140E	管道长度 $L/\text{m}$	2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -(u^2 + \lambda_T) & 0 & 0 \\ \sin(\sqrt{u^2 + \lambda_T}) & \cos(\sqrt{u^2 + \lambda_T}) & 1 & 1 \\ -\sin(\sqrt{u^2 + \lambda_T})(u^2 + \lambda_T) & -\cos(\sqrt{u^2 + \lambda_T})(u^2 + \lambda_T) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

为得到非平凡解, 令上式中的系数矩阵行列式等于 0, 得到

$$\sin(\sqrt{u_c^2 + \lambda_T}) = 0$$

所以

$$u_{c-PP} = \sqrt{\pi^2 - \lambda_T} \quad (15)$$

同理, 可求得左端固支右端铰支条件下临界流速为

$$\begin{aligned} & (u_c^2 + \lambda_T)^{\frac{3}{2}} \cos(\sqrt{u_c^2 + \lambda_T}) - \\ & \sin(\sqrt{u_c^2 + \lambda_T})(u_c^2 + \lambda_T) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

两端固支时, 临界流速表达式为

$$\begin{aligned} & \sqrt{u_c^2 + \lambda_T} \sin(\sqrt{u_c^2 + \lambda_T}) \\ & + 2 \cos(\sqrt{u_c^2 + \lambda_T}) - 2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

值得注意的是, 式(16)和(17)为超越方程, 可由数值方法求解得到临界流速。求得的临界流速公式如下

$$u_{c-CP} = \sqrt{4.493409^2 - \lambda_T} \quad (18)$$

$$u_{c-CC} = \sqrt{6.283185^2 - \lambda_T} \quad (19)$$

根据式(15)、(18)、(19)即可非常方便地求得各边界条件下不同热荷载作用下的临界流速。

## 3 算例分析

Qian<sup>[13]</sup>使用微分求解法求解了热荷载作用下铰支输流管的临界流速问题。为了验证本文提出的解析方法的正确性, 使用Qian<sup>[13]</sup>中的算例进行计算以作对比。该算例的输流管系统参数如表 2 所示, 边界条件为两端铰支。原文使用微分求积法(DQM)进行求解,

本文提出的解析方法与其结果对比如表3所示。

从表3中可以观察到,本文给出的解析解与DQM结果相对误差均小于0.2%,说明本文提出的静态解析方法是正确的。由于DQM方法是一种数值近似方法,其结果与解析法得到的准确值相比具有一定的误差,且随着温度的增加,相对误差逐渐增大。所以,相对于DQM方法而言,本文提出的解析方法计算更简单,准确性更高,可以更方便的得到输流管系统的临界流

速值。

对于边界条件为两端固支和一端铰支一端固支边界条件,求得的临界流速如表4、5所示。从表3、4、5中可以看出,随着热荷载的增加,临界流速逐渐降低,且下降速度越来越快。

3种边界条件下线性和非线性热应力作用对输流管系统临界流速影响如图2所示。从图2中可以看出,非线性热应力作用下管道系统的临界流速大于线性热

表3 本文解析方法与DQM方法结果对比(两端铰支边界条件)

Table 3 Comparison between the analytical method proposed in this paper and the DQM method(hinged-hinged boundary condition)

	线性			非线性		
	DQM	解析解	相对误差/%	DQM	解析解	相对误差/%
0	3.1416	3.1416	0.0002	3.1416	3.1416	0.0002
1	2.9480	2.9479	0.0019	2.9483	2.9483	0.0016
2	2.7408	2.7406	0.0056	2.7420	2.7420	0.0010
3	2.5164	2.5163	0.0028	2.5197	2.5196	0.0050
4	2.2701	2.2700	0.0065	2.2764	2.2763	0.0025
5	1.9935	1.9934	0.0074	2.0048	2.0047	0.0045
6	1.6718	1.6716	0.0123	1.6911	1.6910	0.0038
7	1.2710	1.2708	0.0137	1.3055	1.3054	0.0102
8	0.6605	0.6601	0.0565	0.7432	0.7430	0.0320
8.37	0	0	0	0.3565	0.3559	0.1635
8.4806	0	-	-	0	0	0

表4 一端铰支一端固支边界条件临界流速

Table 4 Critical velocity of the clamped-hinged boundary condition

$\Delta T$	线性	非线性	$\Delta T$	线性	非线性
0	4.4934	4.4934	12	2.4576	2.5103
2	4.2228	4.2237	14	1.9187	2.0093
4	3.9337	3.9374	16	1.1502	1.3371
6	3.6215	3.6305	17.1220	0.3792	0.8177
8	3.2798	3.2974	17.5989	-	0.7296
10	2.8980	2.9292			

表5 两端固支边界条件临界流速

Table 5 Critical velocity of the clamped-clamped boundary condition

$\Delta T$	线性	非线性	$\Delta T$	线性	非线性
0	6.2832	6.2832	30	2.0252	2.3950
5	5.7950	5.7989	31	1.7095	2.1604
10	5.2618	5.2790	32	1.3203	1.8981
15	4.6680	4.7115	33	0.7509	1.5942
20	3.9867	4.0768	33.4781	0	1.4267
25	3.1619	3.3366	35.4090		0

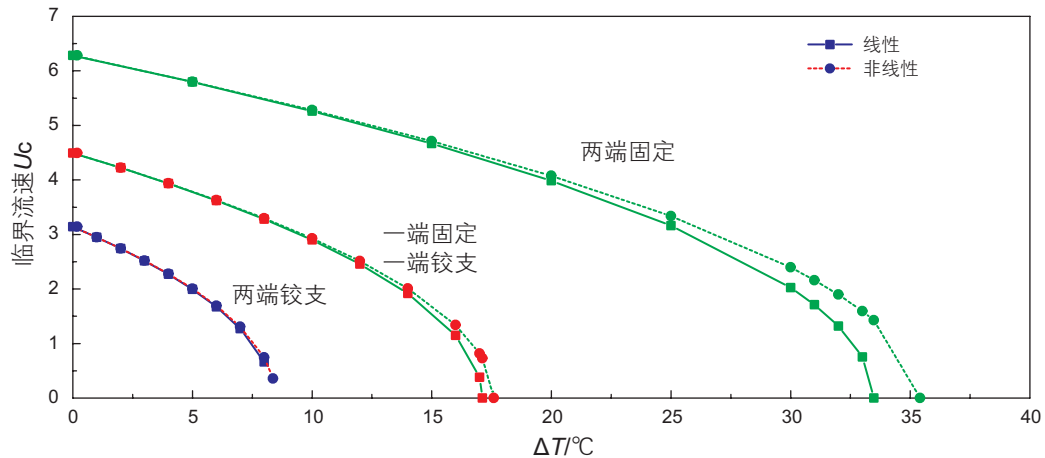


图 2 不同边界条件下线性和非线性热应力对临界流速的影响

Fig. 2 Influence of linear and nonlinear thermal stress on critical velocity under different boundary conditions

应力作用下的临界流速，在温差较小时两者差别不大，在温差较大时两者有一定的差别，对于不同的边界条件影响也有所不同。相同热荷载条件下，两端固定边界条件下的输流管道临界流速最高，一端固定一端铰支边界条件次之，两端铰支边界条件下系统的临界流速最低。同时可以看出，两端固定边界条件下系统的安全温度差范围相对较大，而两端铰支边界条件的安全温度差范围较小。研究表明固定边界条件下的输流管系统能够承受的热荷载最大，工程上对输流管道施加固定边界条件有利于提高热荷载管道系统的稳定性。

## 4 结论

本文根据哈密顿原理推导得到了输流管问题的振动方程，然后根据两端支承管道的临界流速条件将动

态问题转化为静态问题求解，提出了在热荷载作用下两端支承输流管道临界流速的解析方法，并得到了临界流速公式。结合算例分析，得出了以下结论：

(1) 相对于微分求积法，本文提出的解析方法计算更加简单，准确性更高，可以更方便的得到输流管系统的临界流速值，有利于指导工程实践；

(2) 线性热应力和非线性热应力作用下的输流管系统的临界流速均随着热荷载的增加而降低，且下降速度越来越快。同等情况下非线性热应力作用下临界流速大于线性热应力作用下的临界流速，且随着热荷载的增加，两者间的差距逐渐增大；

(3) 对比边界条件发现，固定边界条件能够承受的热荷载最大，因此对热荷载作用下输流管系统施加固定边界条件有利于提高系统的稳定性。

## 参考文献

- [1] PRAMILA A, LAUKKANEN J, LIUKKONEN S. Dynamics and stability of short fluid-conveying Timoshenko element pipes[J]. Journal of Sound & Vibration, 1991, 144(3): 421–425.
- [2] TORNABENE F, MARZANI A, VIOLA E, et al. Critical flow speeds of pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature method[J]. Advances in Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 3(3): 121–138.
- [3] NI Q, ZHANG Z L, WANG L. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(16): 7028–7038.
- [4] LI Y, YANG Y. Forced vibration of pipe conveying fluid by the Green function method[J]. Archive of Applied Mechanics, 2014, 84(12): 1811–1823.
- [5] LI Y D, YANG Y R. Vibration analysis of conveying fluid pipe via He's variational iteration method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 43: 409–420.
- [6] 杨晓东, 金基铎. 输流管道流-固耦合振动的固有频率分析[J]. 振动与冲击, 2008, 27(3): 80–81. [YANG X D, JIN J D. Comparison of Galerkin method and complex mode method in natural frequency analysis of tube conveying fluid[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(3): 80–81.]

- [7] 金基铎, 杨晓东, 邹光胜. 两端支承输流管道的稳定性和临界流速分析[J]. 机械工程学报, 2006, 42(11): 131-136. [JIN J D, YANG X D, ZOU G S. Stability and critical flow velocity of supported pipes conveying fluid[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(11): 131-136.]
- [8] 李琳, 唐冶, 任正义, 等. 具有弹性支承输流管道的稳定性和临界流速分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2010, 31(11): 1509-1513. [LI L, TANG Y, REN Z Y, et al. Stability and critical flow velocity analysis on a fluid-conveying pipeline with elastic support[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2010, 31(11): 1509-1513.]
- [9] 翟红波, 吴子燕, 刘永寿, 等. 两端简支输流管道共振可靠度分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(12): 160-164. [ZHAI H B, WU Z Y, LIU Y S, et al. Analysis of resonance reliability for a simply support pipe conveying fluid[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 160-164.]
- [10] 姬贺炯, 白长青, 韩省亮. 输流管道动力有限元建模及实验研究[J]. 应用力学学报, 2013 (3): 422-427. [JI H J, BAI C Q, HAN S L. Dynamic finite element modeling and experimental research of the fluid-filled pipeline[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013 (3): 422-427.]
- [11] 包日东, 李珊珊. 分析弹性地基一般支承输流管道的动力学特性[J]. 振动与冲击, 2017, 36(1): 201-206. [BAO R D, LI S S. Dynamic characteristics of commonly supported fluid-conveying pipes on elastic foundation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(1): 201-206.]
- [12] 张大千, 钟林林, 孔祥意, 等. 基于有限元的输流管道模态计算方法与试验[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2017, 34(5): 35-44. [ZHANG D Q, ZHONG L L, KONG X Y, et al. Calculation method and experiments of modality of pipe conveying fluid based on finite element method[J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2017, 34(5): 35-44.]
- [13] QIAN Q, WANG L, NI Q. Instability of simply supported pipes conveying fluid under thermal loads[J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36(3): 413-417.
- [14] ZIEGLER F, RAMMERSTORFER F G. Thermoelastic stability[M]. Amsterdam, : Elsevier, 1989.
- [15] PAIDOUSSIS M P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow[M]. Academic Press, 2014.

(责任编辑 王雨墨 编辑 马桂霞)